

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О РАСПРОСТРАНЕНИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ТМ-ВОЛН В КРУГЛОМ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ВОЛНОВОДЕ, ЗАПОЛНЕННОМ НЕЛИНЕЙНОЙ СРЕДОЙ¹

Аннотация. Изучается задача о распространении ТМ-поляризованных электромагнитных волн в двухслойном диэлектрическом волноводе кругового сечения, заполненного нелинейной средой. Физическая проблема сводится к нелинейной задаче сопряжения на собственные значения для системы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Предложен численный метод нахождения собственных значений рассматриваемой задачи. Представлены результаты расчетов.

Ключевые слова: задача на собственные значения, задача сопряжения, уравнения Максвелла, численный метод.

Abstract. The authors investigate a problem of TM-polarized electromagnetic wave propagation in nonlinear two-layer dielectric waveguide with circular cross-section. Waveguide is filled by nonlinear media. The physical problem is reduced to a nonlinear conjugation eigenvalue problem. A numerical method to solve the problem is suggested. Numerical results are presented.

Key words: eigenvalue problem, conjugation problem, Maxwell's equation, numerical method.

1. Постановка задачи

Рассмотрим трехмерное пространство \mathbb{R}^3 с декартовыми координатами $Oxyz$. Это пространство заполнено изотропной средой без источников с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon_3 = \text{const}$. В эту среду помещен цилиндрический диэлектрический волновод с образующей, параллельной оси Oz , и круговым поперечным сечением $W = \{x : 0 < x^2 + y^2 < R_2^2\}$.

Введем цилиндрическую систему координат $O\rho\varphi z$ так, чтобы ось Oz декартовых координат совпадала с одноименной осью цилиндрической системы координат.

Сечение волновода, перпендикулярное его оси, представляет собой два концентрических круга радиусов R_1 и R_2 соответственно, т.е. волновод является двухслойным.

Электромагнитное поле гармонически зависит от времени [1]

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{E}}(\rho, \varphi, z, t) &= \mathbf{E}_+(\rho, \varphi, z) \cos \omega t + \mathbf{E}_-(\rho, \varphi, z) \sin \omega t; \\ \tilde{\mathbf{H}}(\rho, \varphi, z, t) &= \mathbf{H}_+(\rho, \varphi, z) \cos \omega t + \mathbf{H}_-(\rho, \varphi, z) \sin \omega t,\end{aligned}$$

где ω – круговая частота; $\tilde{\mathbf{E}}, \mathbf{E}_+, \mathbf{E}_-, \tilde{\mathbf{H}}, \mathbf{H}_+, \mathbf{H}_-$ – действительные функции. Везде ниже временной множитель опущен.

¹ Работа выполнена при поддержке ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 годы.

Образуем комплексные амплитуды полей \mathbf{E} , \mathbf{H}

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_+ + i\mathbf{E}_-, \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}_+ + i\mathbf{H}_-,$$

где $\mathbf{E} = (E_\rho, E_\varphi, E_z)^T$, $\mathbf{H} = (H_\rho, H_\varphi, H_z)^T$ и $(\cdot)^T$ обозначает операцию транспонирования. Каждая компонента полей \mathbf{E} , \mathbf{H} является функцией трех пространственных переменных.

Электромагнитное поле \mathbf{E} , \mathbf{H} удовлетворяет системе уравнений Максвелла

$$\begin{cases} \text{rot } \mathbf{H} = -i\omega\epsilon\mathbf{E}, \\ \text{rot } \mathbf{E} = i\omega\mu\mathbf{H}, \end{cases} \quad (1)$$

условиям непрерывности касательных составляющих полей \mathbf{E} , \mathbf{H} на границах раздела сред $\rho = R_1$ и $\rho = R_2$ и условию излучения на бесконечности: электромагнитное поле экспоненциально затухает при $\rho \rightarrow \infty$.

Пусть диэлектрическая проницаемость ϵ внутри волновода является скалярной функцией и внутри и вне волновода определяется следующим образом:

$$\epsilon = \begin{cases} \epsilon_1\epsilon_0, & 0 < \rho < R_1, \\ (\epsilon_2 + \alpha|\mathbf{E}|^2)\epsilon_0, & R_1 < \rho < R_2, \\ \epsilon_3\epsilon_0, & \rho > R_2, \end{cases}$$

где ϵ_1 , ϵ_2 , ϵ_3 – вещественные положительные постоянные. Среда предполагается изотропной и немагнитной, во всем пространстве полагаем $\mu = \mu_0$.

Разыскиваются поверхностные волны, распространяющиеся вдоль образующей волновода.

Решение уравнений Максвелла ищется во всем пространстве.

На рис. 1 представлена геометрия задачи. Цилиндр неограниченно продолжается в направлении z .

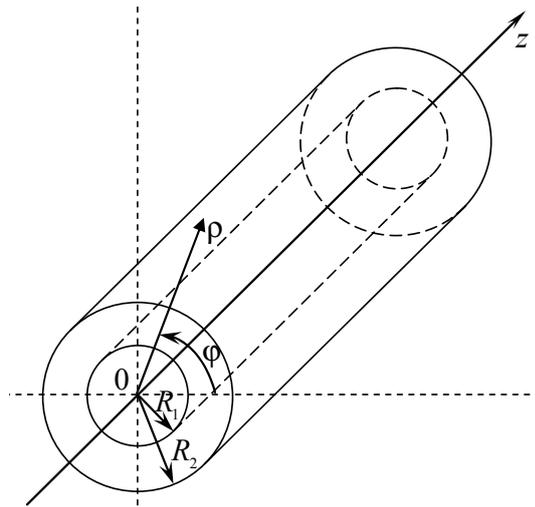


Рис. 1. Геометрия задачи

2. ТМ-волны

Рассмотрим ТМ-волны

$$\mathbf{E} = (E_\rho, 0, E_z)^T, \quad \mathbf{H} = (0, H_\varphi, 0)^T,$$

где $E_\rho = E_\rho(\rho, \varphi, z)$, $E_z = E_z(\rho, \varphi, z)$, $H_\varphi = H_\varphi(\rho, \varphi, z)$.

Можно показать, что для рассматриваемой геометрии и выбранной нелинейности (закон Керра) компоненты полей могут быть представлены в форме

$$E_\rho = E_\rho(\rho)e^{i\gamma z}, \quad E_z = E_z(\rho)e^{i\gamma z}, \quad H_\varphi = H_\varphi(\rho)e^{i\gamma z}, \quad (2)$$

где γ – неизвестный вещественный спектральный параметр (постоянная распространения электромагнитной волны).

Обозначим $k_0^2 = \omega^2 \mu_0 \varepsilon_0$. Подставив компоненты (2) в (1), можно получить

$$\begin{cases} \gamma^2 E_\rho + i\gamma \frac{\partial E_z}{\partial \rho} = k_0^2 \tilde{\varepsilon} E_\rho, \\ i\gamma \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho E_\rho) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial E_z}{\partial \rho} \right) = k_0^2 \tilde{\varepsilon} E_z, \end{cases} \quad (3)$$

где $k_0^2 = \omega^2 \mu_0 \varepsilon_0$ и $\varepsilon = \tilde{\varepsilon} \varepsilon_0$, ε_0, μ_0 – диэлектрическая и магнитная проницаемости свободного пространства.

Обозначая

$$\begin{aligned} u_1(\rho, \gamma) &:= E_\rho(\rho, \gamma), \\ u_2(\rho, \gamma) &:= iE_z(\rho, \gamma), \end{aligned} \quad (4)$$

получим из (3) [1, 2]

$$\begin{cases} \gamma u_2' + (\gamma^2 - k_0^2 \tilde{\varepsilon}) u_1 = 0, \\ -\gamma \frac{1}{\rho} (\rho u_1)' - \frac{1}{\rho} (\rho u_2)' - k_0^2 \tilde{\varepsilon} u_2 = 0, \end{cases} \quad (5)$$

где производная обозначает дифференцирование по ρ ; $u_1(\rho, \gamma), u_2(\rho, \gamma)$ – вещественные функции.

Будем искать те действительные значения спектрального параметра γ , для которых существуют действительные не равные тождественно нулю решения $u_1(\rho, \gamma), u_2(\rho, \gamma)$ системы уравнений (5).

Считаем, что функции u_1, u_2 дифференцируемы так, что

$$u_1 \in C[0, R_1] \cap C[R_1, R_2] \cap C[R_2, +\infty) \cap C^1[0, R_1] \cap C^1[R_1, R_2] \cap C^1[R_2, +\infty),$$

$$u_2 \in C[0, +\infty) \cap C^1[0, R_1] \cap C^1[R_1, R_2] \cap C^1[R_2, +\infty) \cap$$

$$\cap C^2(0, R_1) \cap C^2(R_1, R_2) \cap C^2(R_2, +\infty).$$

Считаем, что $\gamma^2 > \varepsilon_3$.

3. Решение системы дифференциальных уравнений

При $\rho < R_1$ имеем $\varepsilon = \varepsilon_1 \varepsilon_0$ и система (5) примет вид

$$\begin{cases} \gamma u_2' - k_1^2 u_1 = 0, \\ -\gamma \frac{1}{\rho} (\rho u_1)' - \frac{1}{\rho} (\rho u_2)' - k_0^2 \varepsilon_1 u_2 = 0, \end{cases} \quad (6)$$

где $k_1^2 = \gamma^2 - k_0^2 \varepsilon_1$.

Выражая функцию u_1 из первого уравнения и подставляя ее во второе уравнение системы, получим уравнение для функции u_2 :

$$-\frac{\gamma^2}{k_1^2} \frac{1}{\rho} (\rho u_2)' - \frac{1}{\rho} (\rho u_2)' - k_0^2 \varepsilon_1 u_2 = 0.$$

Последнее уравнение является уравнением Бесселя, его легко записать в виде

$$\frac{1}{\rho} (\rho u_2)' + k_1^2 u_2 = 0.$$

Тогда решение системы (6) имеет вид

$$\begin{cases} u_1(\rho) = \frac{\gamma}{k_1} (C_1 I_0'(k_1 \rho) + C_1 K_0'(k_1 \rho)), \\ u_2(\rho) = C_1 I_0(k_1 \rho) + C_2 K_0(k_1 \rho). \end{cases} \quad (7)$$

Функции I_0 и K_0 – модифицированная функция Бесселя и функция Макдональда нулевых порядков соответственно. Функция Макдональда $K_0(\rho)$ стремится к бесконечности при $\rho \rightarrow 0$, а функция Бесселя $I_0(\rho)$ ограничена при $\rho \rightarrow 0$. Принимая во внимание условие ограниченности поля во всякой конечной области и учитывая то, что $I_0'(\rho) = I_1(\rho)$, получаем из (7)

$$\begin{cases} u_1(\rho) = -\frac{\gamma}{k_1} C_1 K_1(k_1 \rho), \\ u_2(\rho) = C_1 I_0(k_1 \rho). \end{cases} \quad (8)$$

При $R_1 < \rho < R_2$ имеем $\varepsilon = (\varepsilon_2 + \alpha |\mathbf{E}|^2) \varepsilon_0$. Тогда система (5) примет вид¹

¹ Доказательство существования решений системы (9) при малых α может быть получено методами теории интегральных уравнений (см. [2–4]).

$$\begin{cases} \gamma u_2' + \left(\gamma^2 - k_0^2 (\varepsilon_2 + \alpha (u_1^2 + u_2^2)) \right) u_1 = 0, \\ -\gamma \frac{1}{\rho} (\rho u_1)' - \frac{1}{\rho} (\rho u_2)' - k_0^2 (\varepsilon_2 + \alpha (u_1^2 + u_2^2)) u_2 = 0. \end{cases} \quad (9)$$

При $\rho > R_2$ имеем $\varepsilon = \varepsilon_3 \varepsilon_0$. Тогда система (5) примет вид

$$\begin{cases} \gamma u_2' + k_3^2 u_1 = 0, \\ -\gamma \frac{1}{\rho} (\rho u_1)' - \frac{1}{\rho} (\rho u_2)' - k_0^2 \varepsilon_3 u_2 = 0, \end{cases} \quad (10)$$

где $k_3^2 = \gamma^2 - k_0^2 \varepsilon_3$.

Решение системы (10) имеет вид

$$\begin{cases} u_1(\rho) = -\frac{\gamma}{k_3^2} (C_3 I_0'(k_3 \rho) + C_4 K_0'(k_3 \rho)), \\ u_2(\rho) = C_3 I_0(k_3 \rho) + C_4 K_0(k_3 \rho). \end{cases} \quad (11)$$

Известно, что функция $I_0(\rho)$ стремится к бесконечности при $\rho \rightarrow +\infty$, а функция $K_0(\rho)$ стремится к нулю при $\rho \rightarrow +\infty$. Принимая во внимание условие на бесконечности и учитывая то, что $K_0'(\rho) = -K_1(\rho)$, получаем из (11)

$$\begin{cases} u_1(\rho) = \frac{\gamma}{k_3^2} C_4 K_1(k_3 \rho), \\ u_2(\rho) = C_4 K_0(k_3 \rho). \end{cases} \quad (12)$$

4. Условия сопряжения и дисперсионное уравнение

Как известно, касательные составляющие электромагнитного поля непрерывны на границе раздела сред. В рассматриваемом случае касательными составляющими являются компоненты E_z и H_φ . Из этого условия получаем

$$\begin{aligned} E_z(R_1 + 0) &= E_z(R_1 - 0), H_\varphi(R_1 + 0) = H_\varphi(R_1 - 0), \\ E_z(R_2 + 0) &= E_z(R_2 - 0), H_\varphi(R_2 + 0) = H_\varphi(R_3 - 0). \end{aligned}$$

Компонента E_ρ является нормальной компонентой и на границе раздела сред испытывает конечный скачок, однако величина $\tilde{\varepsilon} E_\rho$ на границе раздела сред непрерывна.

Из вышесказанного получаем условия сопряжения для функций u_1 и u_2 :

$$[\tilde{\varepsilon} u_1] \Big|_{\rho=R_1} = 0, [u_2] \Big|_{\rho=R_1} = 0, [\tilde{\varepsilon} u_1] \Big|_{\rho=R_2} = 0, [u_2] \Big|_{\rho=R_2} = 0, \quad (13)$$

где $[f] \Big|_{x=x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) - \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x)$.

Тогда из (13) получаем

$$\varepsilon_1 u_1 (R_1 - 0) = (\varepsilon_2 + \alpha |\mathbf{u}|^2) u_1 (R_1 + 0), \quad u_2 (R_1 - 0) = u_2 (R_1 + 0); \quad (14)$$

$$(\varepsilon_2 + \alpha |\mathbf{u}|^2) u_1 (R_2 - 0) = \varepsilon_3 u_1 (R_2 + 0), \quad u_2 (R_2 - 0) = u_2 (R_2 + 0), \quad (15)$$

где $|\mathbf{u}|^2 = |u_1|^2 + |u_2|^2$, $\mathbf{u} = (u_1, u_2)^T$.

Легко видеть, что при умножении в (1) полей \mathbf{E} , \mathbf{H} на произвольную постоянную $C_0 \neq 0$ и коэффициента нелинейности на C_0^{-2} система уравнений Максвелла не изменяется. Однако это обстоятельство *не дает* возможность выбора дополнительного условия нормировки. Поскольку при расчетах с конкретным коэффициентом α окажется, что этот коэффициент нормирован на неизвестную постоянную C_0^{-2} . Это говорит о том, что рассматриваемая нелинейная задача существенно зависит от начального условия (от амплитуды падающего поля). Уже это отличает рассматриваемую нелинейную задачу от аналогичной линейной (где диэлектрическая проницаемость кусочно-постоянна в волноводе). То есть в линейной задаче каждому собственному значению отвечает целый «пучок» волн с одной постоянной распространения и всевозможными амплитудами падающего поля. В рассматриваемой нелинейной задаче это уже не так.

Считая постоянную C_1 заданной и равной единице¹, из (8), (12), (14), (15) получаем дисперсионное уравнение

$$\Delta(\gamma) \equiv \left(\varepsilon_2 + \alpha |\mathbf{u}|^2 \Big|_{\rho=R_2-0} \right) u_1 (R_2 - 0) - \gamma \frac{\varepsilon_3}{k_3} \frac{K_1(k_3 R_2)}{K_0(k_3 R_2)} u_2 (R_2 - 0). \quad (16)$$

Теперь мы можем сформулировать нелинейную задачу сопряжения на собственные значения (*задача P_M*), к которой свелась исходная задача о распространении волн. *Требуется отыскать собственные значения γ и соответствующие им не равные тождественно нулю функции u_1, u_2 , определяемые выражениями (8) при $\rho < R_1$ и (12) при $\rho > R_2$, удовлетворяющие системе уравнений (9) при $R_1 < \rho < R_2$, условиям сопряжения (13).*

5. Численные результаты

Для получения численных результатов решалась система дифференциальных уравнений (9) при $\gamma_j = \gamma_0 + jh_0$, $j = \overline{0, N-1}$, с некоторым шагом h_0 , где $\gamma \in (\varepsilon_3, \gamma^*)$, $\gamma^* < \max(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ (в линейной задаче) и $\gamma^* > \max(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ (в нелинейной задаче). Затем вычислялось значение $\Delta(\gamma_j)$ и определялись отрез-

¹ Из предыдущего пояснения ясно, что при расчетах значения одной из постоянных C_1 или C_4 необходимо задавать. Можно задавать значение постоянной на любой из границ волновода.

ки перемены знака $\Delta(\gamma_j)$. На каждом отрезке значение локализованного корня уравнения $\Delta(\gamma) = 0$ уточнялось методом дихотомии.

Результаты расчетов представлены на рис. 2–6.

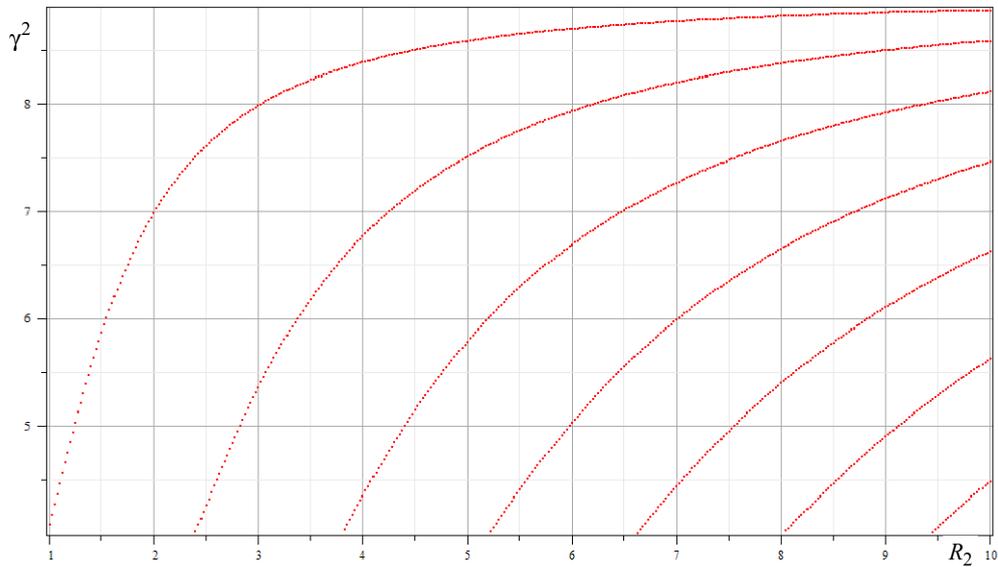


Рис. 2. Зависимость постоянной распространения γ^2 от радиуса R_2 .

При расчете использовались следующие значения параметров:

$$\varepsilon_1 = 4, \varepsilon_2 = 9, \varepsilon_3 = 1, R_1 = 2, 2 < R_2 < 12, \alpha = 0, k_0 = 1$$

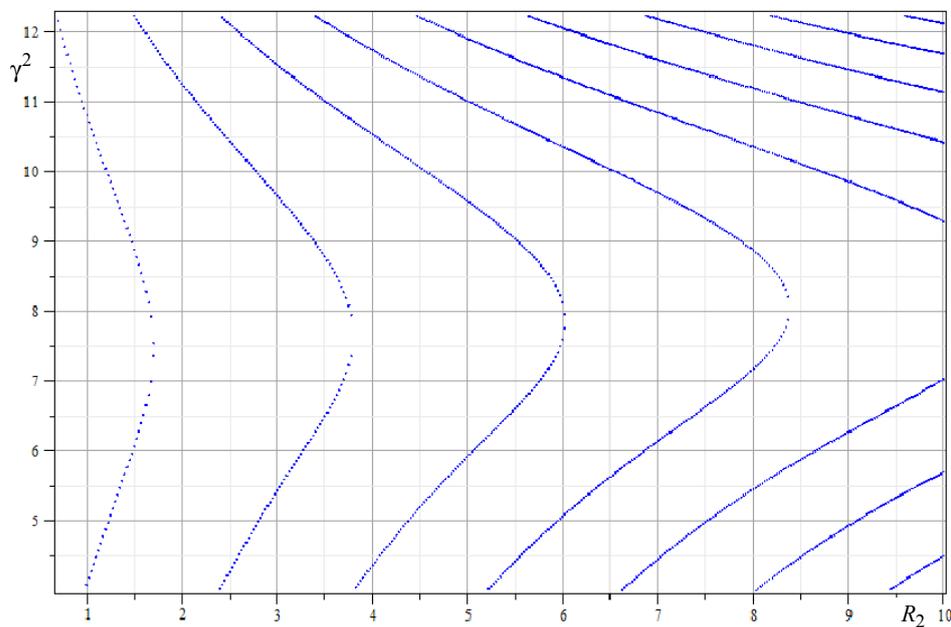


Рис. 3. Зависимость постоянной распространения γ^2 от радиуса R_2 .

При расчете использовались следующие значения параметров:

$$\varepsilon_1 = 4, \varepsilon_2 = 9, \varepsilon_3 = 1, R_1 = 2, 2 < R_2 < 12, \alpha = 0,01, k_0 = 1$$

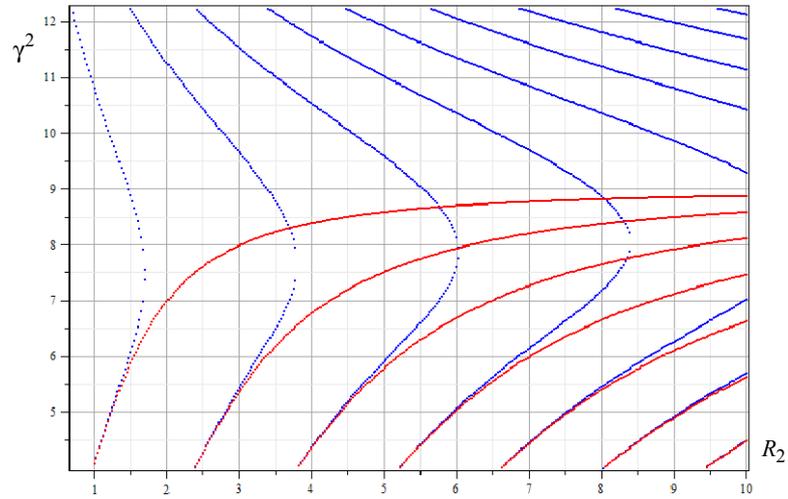


Рис. 4. Взаимное расположение графиков, приведенных на рис. 2, 3

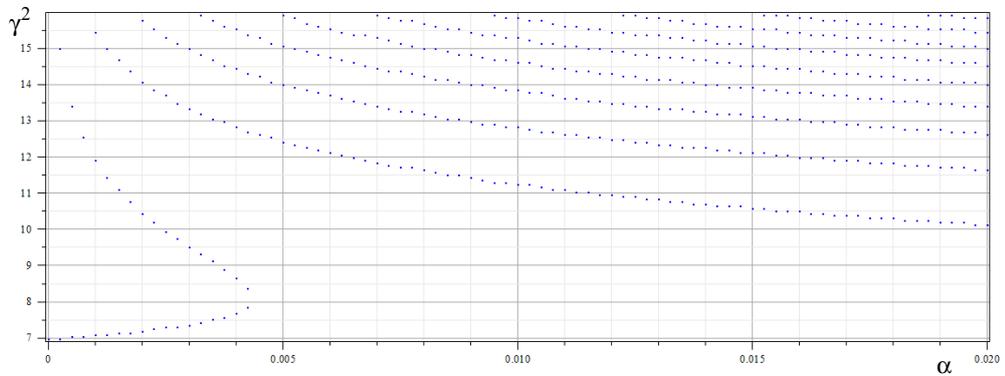


Рис. 5. Зависимость постоянной распространения γ^2 от коэффициента нелинейности α . При расчете использовались следующие значения параметров: $\varepsilon_1 = 4$, $\varepsilon_2 = 9$, $\varepsilon_3 = 1$, $R_1 = 2$, $R_2 = 4$, $k_0 = 1$

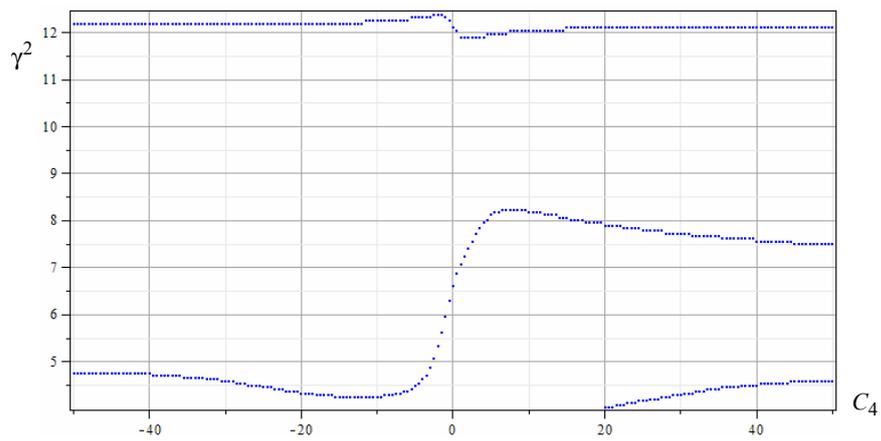


Рис. 6. Зависимость постоянной распространения γ^2 от постоянной C_4 . При расчете использовались следующие значения параметров: $\varepsilon_1 = 4$, $\varepsilon_2 = 9$, $\varepsilon_3 = 1$, $R_1 = 2$, $R_2 = 4$, $\alpha = 0,01$, $k_0 = 1$

Список литературы

1. **Eleonskii, V. M.** Cylindrical Nonlinear Waveguides / V. M. Eleonskii, L. G. Oganets'yants, V. P. Silin. // Soviet physics JETP. – 1972. – V. 35, № 1. – P. 44–47.
2. **Смирнов, Ю. Г.** О разрешимости нелинейной краевой задачи на собственные значения для распространяющихся ТМ-волн в круглом нелинейном волноводе / Ю. Г. Смирнов, Э. А. Хорошева // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2010. – № 3. – С. 55–70.
3. **Смирнов, Ю. Г.** Распространение электромагнитных волн в цилиндрических диэлектрических волноводах, заполненных нелинейной средой / Ю. Г. Смирнов, С. Н. Куприянова // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2004. – Т. 44, № 10. – С. 1850–1860.
4. **Schürmann, H.-W.** Propagation of TE-waves in cylindrical nonlinear dielectric waveguides / H.-W. Schürmann, Yu. G. Smirnov, Yu. V. Shestopalov // Physical Review E. – 2005. – V. 71, № 1. – P. 016614-1–016614-10.

Валовик Дмитрий Викторович

кандидат физико-математических наук,
доцент, кафедра математики
и суперкомпьютерного моделирования,
Пензенский государственный
университет

E-mail: dvalovik@mail.ru

Valovik Dmitry Victorovich

Candidate of physical and mathematical
sciences, associate professor,
sub-department of mathematics
and supercomputer modeling,
Penza State University

Смолькин Евгений Юрьевич

аспирант, Пензенский
государственный университет

E-mail: mmm@pnzgu.ru

Smolkin Evgeny Yuryevich

Postgraduate student,
Penza State University

УДК 517.927, 519.624

Валовик, Д. В.

Численное решение задачи о распространении электромагнитных ТМ-волн в круглом диэлектрическом волноводе, заполненном нелинейной средой / Д. В. Валовик, Е. Ю. Смолькин // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2012. – № 3 (23). – С. 29–37.